

# DEVOIR SURVEILLÉ

**1** Les questions 1) à 4) suivantes sont indépendantes.

- 1) Calculer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $x \mapsto \sqrt{e^x + 3}$ .
- 2) Calculer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sh} x}$ .
- 3) Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . On suppose que  $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Montrer que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ .
- 4) Soit  $\alpha > 3$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto x^\alpha \cos \frac{1}{x^2}$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**2** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé une fois pour toutes. On note  $\mathcal{P}_n$  le sous-espace vectoriel  $\operatorname{Vect}(t \mapsto e^{ikt})_{-n \leq k \leq n}$  du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Les éléments de  $\mathcal{P}_n$  sont appelés les *polynômes trigonométriques de degré au plus n*.

Pour tout  $f \in \mathcal{P}_n$ , on note  $\|f\|_\infty$  la norme infinie de  $f$  calculée sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Pour tout  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , on note en revanche  $\|P\|_\infty$  la norme infinie de la fonction polynomiale  $x \mapsto P(x)$  calculée sur  $[-1, 1]$ . Attention de ne pas confondre les deux notations !

- 1) Justifier l'existence des réels  $\|f\|_\infty$  et  $\|P\|_\infty$  pour tous  $f \in \mathcal{P}_n$  et  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ .

Ce problème est consacré à deux inégalités classiques de contrôle des dérivées :

$$\forall f \in \mathcal{P}_n, \quad \|f'\|_\infty \leq n \|f\|_\infty \quad (\text{inégalité de Bernstein}) \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty \quad (\text{inégalité de Markov}).$$

### Partie A – Inégalité de Bernstein

- 2) a) Montrer que  $\mathcal{P}_n$  est stable par dérivation et translation, i.e. que pour tous  $f \in \mathcal{P}_n$  et  $m \in \mathbb{R}$  :  $f' \in \mathcal{P}_n$  et  $t \mapsto f(t+m) \in \mathcal{P}_n$ .

- b) Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{P}_n$ , il existe un (vrai) polynôme  $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$  pour lequel  $f(t) = e^{-int} P(e^{it})$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

- 3) Soit  $f \in \mathcal{P}_n$  à valeurs réelles.

- a) Montrer que  $|f'|$  possède un maximum sur  $\mathbb{R}$ .

On peut ainsi noter  $m$  un réel en lequel  $|f'|$  atteint son maximum et  $\varphi$  la fonction  $t \mapsto f'(m) \sin(nt) - n f(t+m)$ .

- b) Montrer que  $\varphi''$  s'annule en 0.

Raisonnant par l'absurde, on fait l'hypothèse que  $\|f'\|_\infty > n \|f\|_\infty$ .

- c) En déduire que  $\varphi$  s'annule au moins  $2n$  fois sur  $\left[ \frac{\pi}{2n}, \frac{(4n+1)\pi}{2n} \right]$  et au moins  $2n$  fois sur  $]0, 2\pi[$ .

- d) Montrer que  $\varphi''$  s'annule au moins  $2n$  fois sur  $]0, 2\pi[$ .

- e) En déduire, grâce au résultat de la question 2)b), que  $\varphi''$  est la fonction nulle, puis dénicher une contradiction.

L'inégalité de Bernstein est ainsi démontrée pour les fonctions à valeurs réelles.

- 4) Soit  $f \in \mathcal{P}_n$ . Comme en 3)a),  $|f'|$  possède un maximum sur  $\mathbb{R}$  et l'atteint en certain réel  $m$ . On note ensuite  $\theta$  un réel pour lequel  $f'(m) = |f'(m)| e^{i\theta}$ . Montrer que la fonction  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)$  appartient à  $\mathcal{P}_n$  et en déduire l'inégalité de Bernstein :  $\|f'\|_\infty \leq n \|f\|_\infty$ .

### Partie B – Inégalité de Markov

Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  fixé une fois pour toutes. Montrer l'inégalité de Markov revient à montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |P'(x)| \leq n^2 \|P\|_\infty, \quad \text{i.e. que :} \quad \forall t \in [0, \pi], \quad |P'(\cos t)| \leq n^2 \|P\|_\infty.$$

On note  $f$  la fonction  $t \mapsto P(\cos t)$  et on pose  $a_n = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{n}$ .

- 5) a) Montrer que  $f$  appartient à  $\mathcal{P}_n$ , puis que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :  $|P'(\cos t) \sin t| \leq n \|P\|_\infty$ .

b) En déduire que pour tout  $t \in [a_n, \pi - a_n]$  :  $|P'(\cos t)| \leq n^2 \|P\|_\infty$ .

Il reste à montrer que l'inégalité  $|P'(\cos t)| \leq n^2 \|P\|_\infty$  est vraie pour  $t \in [0, a_n \cup ]\pi - a_n, \pi]$ , mais c'est moins évident car dans l'inégalité  $|P'(\cos t)| \leq \frac{n \|P\|_\infty}{\sin t}$  de la question 5a), le majorant tend vers  $+\infty$  lorsque  $t$  tend vers 0 ou  $\pi$ .

6) a) Montrer que  $\|f''\|_\infty \leq n^2 \|f\|_\infty$ , puis que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :  $|f'(t)| \leq n^2 \|P\|_\infty \min\{|t|, |\pi - t|\}$ .

b) Montrer que pour tout  $t \in [0, a_n]$  :  $\sin t \geq \frac{t}{na_n}$ .

c) En déduire que pour tout  $t \in [0, a_n \cup ]\pi - a_n, \pi]$  :  $|P'(\cos t)| \leq n^3 a_n \|P\|_\infty$ .

d) Pourquoi le résultat de la question c) ne démontre-t-il pas l'inégalité de Markov? Que vaut la limite de  $na_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

On vient quand même de montrer une sorte d'inégalité de Markov :  $\|P'\|_\infty \leq n^3 a_n \|P\|_\infty$ , mais pas aussi fine.

On note à présent  $T_n$  le  $n^{\text{ème}}$  polynôme de Tchebychev. On rappelle que  $T_n(\cos t) = \cos(nt)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , que  $T_n$  est de degré  $n$  et que si on pose  $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , alors  $T_n = 2^{n-1} (X - \cos \theta_0) \dots (X - \cos \theta_{n-1})$ .

7) Montrer que  $[\theta_0, \theta_{n-1}] \subset [a_n, \pi - a_n]$  en exploitant une inégalité de concavité du sinus.

D'après 5b), on peut ainsi affirmer que pour tout  $t \in [\theta_0, \theta_{n-1}]$  :  $|P'(\cos t)| \leq n^2 \|P\|_\infty$ .

8) Montrer que  $\|T'_n\|_\infty = n^2$ . On pourra commencer par dériver la fonction  $t \mapsto T_n(\cos t)$ .

9) On note  $L_0, \dots, L_{n-1}$  les polynômes de Lagrange de  $\cos \theta_0, \dots, \cos \theta_{n-1}$ .

a) Simplifier  $T'_n(\cos \theta_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , puis montrer que  $T_n = \frac{(-1)^k n}{\sin \theta_k} (X - \cos \theta_k) L_k$ .

b) En déduire que pour tout  $t \in [0, \pi] \setminus \{\theta_0, \dots, \theta_{n-1}\}$  :

$$P'(\cos t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k T_n(\cos t)}{\cos t - \cos \theta_k} P'(\cos \theta_k) \sin \theta_k \quad \text{et} \quad T'_n(\cos t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(\cos t)}{\cos t - \cos \theta_k}.$$

c) Montrer enfin que pour tout  $t \in [0, \theta_0 \cup ]\theta_{n-1}, \pi]$  :  $|P'(\cos t)| \leq n^2 \|P\|_\infty$ .

L'inégalité de Markov est démontrée.

10) Soient  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ . Notant  $f$  la fonction  $x \mapsto x^d$  sur  $[-1, 1]$ , on suppose qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n \geq 1$  pour lequel  $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ .

a) Montrer que pour tout  $x \geq 0$  :  $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ , puis que  $P(1) - P\left(1 - \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{d}\right) \geq (1 - 2\sqrt{\varepsilon})d$ .

b) En déduire que  $n \geq (1 - 2\sqrt{\varepsilon})\sqrt{d}$ .

Réciproquement, on peut montrer qu'il existe réellement un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré environ  $\sqrt{d}$  pour lequel  $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ .